NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 76, marzo de 2011, páginas 47–54

La fascinante matemática de los nudos

Rafael Andrés Alemañ Berenguer (Universidad *Miguel Hernández*-Elche)
Estrella Jornet Gil (Instituto de Enseñanza Secundaria *Las Lomas* de Juan XXIII - Alicante)

Fecha de recepción: 11 de febrero de 2010
Fecha de aceptación: 29 de Julio de 2010

Resumen El estudio analítico y topológico de las curvas anudadas en el seno de variedades multidimensionales, ha permitido vislumbrar un insospechado horizonte de resultados matemáticos así como de sorprendentes implicaciones físicas.

Palabras clave Nudos, análisis, topología, variedades, multidimensional, física matemática.

Abstract The analytic and topologic study of knots inside *n*-dimensional manifolds has allowed us to peep at an unexpected horizon of mathematic results as well as surprising physical implications.

Keywords Knots, analysis, topology, manifolds, *n*-dimensional, mathematical physics.

1. Introducción

Observar a un experimentado marinero realizando nudos con una cuerda, es un verdadero espectáculo que cualquiera puede admirar en circunstancias propicias. Sin embargo, las asombrosas propiedades de los nudos, considerados en sí mismos como puros objetos matemáticos, no resultan tan sencillas de advertir. Estas propiedades, una vez que se estudian en profundidad, sugieren la posible existencia de una relación con ciertos comportamientos exhibidos por la naturaleza en sus niveles más profundos, ya en la más sofisticada física de partículas o en las teorías sobre la estructura del espacio-tiempo. Así pues, el estudio topológico de las diversas formas posibles de anudar y desanudar curvas, alimenta una de las más activas y difíciles áreas de investigación en matemáticas fundamentales (Adams, 1994; Cromwell, 2004).

En 1867 Lord Kelvin (1824-1907) propuso su teoría del “átomo vorticial”, inspirado por un artículo sobre vórtices de Helmholtz y por el trabajo de Riemann sobre funciones abelianas. Según la idea de Kelvin, los átomos –y la materia en general– no serían más que remolinos, o vórtices, en el éter que ocupaba la totalidad del espacio físico. La estabilidad hidrodinámica de los nudos explicaba, a su parecer, las propiedades usuales de la materia. Por este mismo camino, Kelvin albergaba la esperanza de justificar las propiedades químicas de los átomos a partir de los anudamientos producidos entre los vórtices de éter.

Diez años después, el también británico Peter G. Tait (1831-1901) publicó su primer artículo sobre la enumeración de los tipos posibles de nudos. Algo más tarde, Tait comenzó a colaborar con el matemático C. N. Little hasta el punto de que en torno al año 1900 habían conseguido clasificar los nudos con diez entrecruzamientos. El problema que encontraron estos autores consistía en que las herramientas formales para el estudio de los nudos no se hallaban bien desarrolladas. Por ese motivo, Tait llegó a distinguir nudos diferentes pero no pudo demostrar matemáticamente esa diferencia. A comienzos del siglo XX, por fortuna, el avance de la topología permitió abordar con mayor solvencia la tarea iniciada por Tait y Little, definiendo lo que es un nudo, probando teoremas sobre ellos y estableciendo clasificaciones que los distinguiesen.

2. Definiciones y propiedades

De forma semi-intuitiva podríamos concebir un nudo como una manera específica de insertar una circunferencia en el espacio (Lozano, 1998). Cualquier alteración de un nudo que se realice sin cortar ni volver a pegar la línea que lo representa, engendrará un nudo equivalente. Esta relación de equivalencia viene matemáticamente expresada por la existencia de una isotopía entre el nudo inicial y el final. Contemplada con amplitud, la teoría de nudos se presenta como una rama de la topología algebraica dedicada a estudiar los diversos modos de insertar un espacio topológico en otro. La forma más simple de este problema implica la inserción del círculo de radio unidad en el espacio tridimensional. Por su parte, un nudo se definiría como una curva lineal cerrada mediante diversas circunvoluciones sobre sí misma en el espacio tridimensional euclídeo R^3. Como hemos visto, dos nudos se consideran equivalentes si uno puede convertirse en el otro tras una ligera deformación sin cortes ni roturas. En ese caso existe un homeomorfismo en R^3 que aplica uno de los nudos sobre el otro.

La definición simple de nudo previamente esbozada –como una curva continua, simple y cerrada en un espacio tridimensional euclídeo $\mathbf{R}^3$– hace muy difícil manejar las deformaciones, que juegan un papel esencial en las propiedades de los nudos. En ocasiones resulta preferible definir un nudo como una curva poligonal cerrada y simple en $\mathbf{R}^3$. Sean, por ejemplo, dos puntos distintos en un 3-espacio, p y q, e indiquemos como [p , q] el segmento de línea que los une. Así, para un conjunto ordenado de puntos distintos, $(p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n)$, la unión de los segmentos $[p_1, p_2]$, $[p_2, p_3]$, …., $[p_{n-1}, p_n]$ y $[p_n, p_1]$, se denomina curva poligonal cerrada. Si además cada segmento intersecta exactamente a otros dos segmentos, intersectando a cada uno de ellos únicamente en su extremo, entonces la curva se dice simple.

Tenemos así los llamados “nudos de barras” o “nudos de varillas”, formados por segmentos rígidos. Intuitivamente, parece sencillo percatarse de que un nudo formado por una curva suave y continua podría aproximarse tanto como se quiera mediante un gran número de segmentos en una línea poligonal.

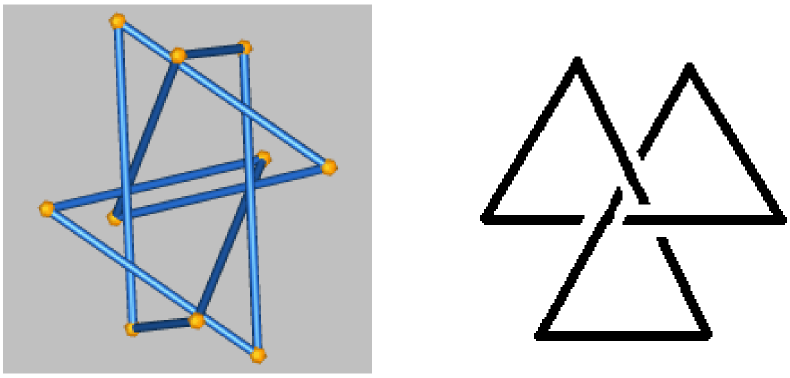


Figura 1. Línea poligonal (izq.) y su representación esquemática (dcha.)

Llegamos con todo ello a una útil definición para identificar los vértices de un nudo poligonal. Si el conjunto ordenado $(p_1, p_2,..., p_n)$ define un nudo, y ningún otro subconjunto ordenado y propio define el mismo nudo, los elementos $\{p_i\}$ del conjunto reciben el nombre de vértices.

En 1914 Max Dehn (1878 – 1952) fue el primero en probar la equivalencia, o alternativamente la inequivalencia, de dos nudos gracias a las peculiares propiedades de deformación de estos objetos matemáticos. Dos nudos se consideran equivalentes si pueden transformarse uno en otro mediante una deformación continua. En consecuencia, un nudo J se considera una deformación elemental de otro nudo K si uno de los dos queda determinado por una secuencia de puntos $(p_1, p_2,\ldots, p_n)$ y el otro queda determinado por la secuencia $(p_0, p_1, p_2,\ldots, p_n)$, donde (1) p_0 es un punto no colineal con p_1 y p_n, y (2) el triángulo cuyos vértices son (p_0, p_1, p_n), intersecta el nudo constituido por $(p_1, p_2,\ldots,p_n)$ tan solo en el segmento $[p_1, p_n]$. Por tanto los nudos K y J son equivalentes si hay una secuencia de nudos $K = K_0, K_1,\ldots,K_n = J$, donde cada $K_{(i+1)}$ es una deformación elemental de K_i para *i* mayor que cero.

El diagrama de un nudo es la proyección sobre un plano de un nudo tridimensional. Bajo ciertas condiciones puede probarse que si dos nudos tienen el mismo diagrama ambos son equivalentes. Ahora bien, ¿cómo podemos confirmar la igualdad de los diagramas de dos nudos? Para comprobar la equivalencia de diagramas, en 1932 K. Reidemeister publicó unas transformaciones que llevan su nombre, los “desplazamientos de Reidemeister”. El teorema correspondiente nos asegura que si dos nudos son equivalentes sus diagramas pueden convertirse uno en otro a través de una secuencia de desplazamientos de Reidemeister. Sin embargo, para nudos complicados los cálculos requeridos por este procedimiento suelen hacerse farragosamente largos (Livingstone, 1993).

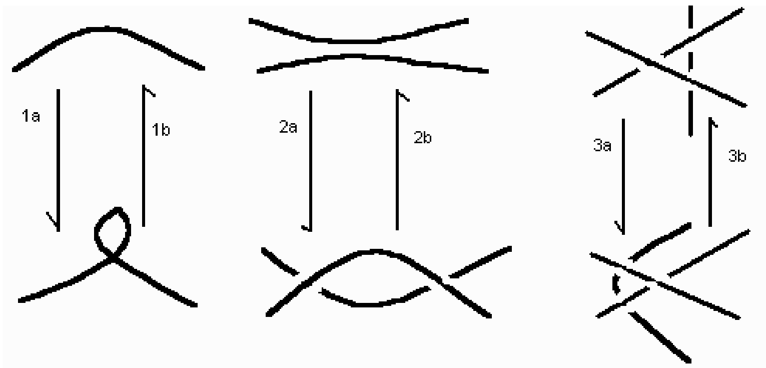
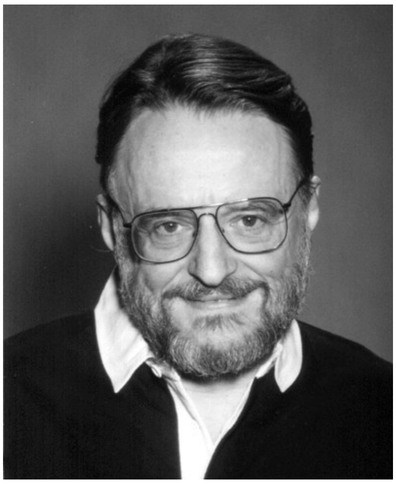


Figura 2. Ejemplos de desplazamientos de Reidemeister

Un enlace, por otra parte, consiste en la inserción de un número finito de circunferencias en el espacio. La imagen física correspondería a la de varias cuerdas cerradas, que pueden estar anudadas y a la vez enlazadas unas con otras. De ello se deduce que un nudo puede concebirse como un enlace con una sola componente. Dos diagramas representan enlaces equivalentes si, y solo si, se puede pasar de uno a otro mediante la aplicación de un número finito de desplazamientos de Reidemeister (Lozano, 1998). Los tres desplazamientos de Reidemeister recogidos en la figura 2, coinciden con las denominadas transformaciones de tipo I, II y III.

3. El estudio moderno de los nudos

Con los ilustres precedentes de Max Dehn y James Waddell Alexander II (1888-1971), uno de los especialistas que más relevantes aportaciones realizó en esta disciplina durante el siglo XX fue el británico John Horton Conway (1937-), profesor de la Universidad de Princenton. Conway es un prominente matemático que cultivó, entre otros muchos campos, la teoría de nudos, los grupos finitos de simetría, y la teoría de autómatas celulares. Autor de más de diez libros y ciento treinta artículos sobre una amplia variedad de temas de matemáticas, también abordó las teorías de números, de juegos y de codificación. Su más interesante contribución en aritmética consistió en la creación de un nuevo sistema numérico[1], "los números surreales". Conway adquirió también popularidad por su invención de simulaciones cibernéticas de la vida celular. Este "juego de la vida" –como lo llamó Martin Gardner en su columna de la revista *Scientific American*– pese a estar gobernado por reglas muy simples, da lugar a un comportamiento notablemente complejo. Por estos y otros muchos méritos, Conway ingresó en la Royal Society y fue galardonado con el premio Polya de la Sociedad Matemática de Londres (James, 1999).



John H. Conway

El objetivo declarado de Conway era sencillamente descubrir un algoritmo que identificase cuándo un lazo de cuerda constituye en realidad un nudo (Conway, 1970, pp. 329-338). Puede parecer una cuestión banal, pero si nos detenemos a pensar sobre ello durante un instante nuestra impresión cambiará. Es posible componer un enrevesado manojo con los lazos cerrados de una cuerda, los cuales, sin embargo, puedan ser desatados sin cortar dicha cuerda. No es en absoluto trivial determinar qué lazos pueden ser desatados y cuáles no pueden serlo (salvo escisión o ruptura). Y el asunto se complica si ascendemos a dimensiones superiores, donde las posibilidades de enrollamiento para una cuerda aumentan enormemente.

A mediados de la década de 1930, H. Seifert demostró que si un nudo es la frontera de una superficie en un espacio tridimensional, entonces esa superficie puede usarse para estudiar el nudo. Con ello se abrió la puerta al uso de métodos geométricos en la teoría de nudos (Crowell y Fox, 1963).

[1] Los números surreales fueron denominados así por Donald Knuth en su famosa novela (Knuth, 1974) sobre el tema, y el apelativo –que agradó a Conway– pronto hizo fortuna. Además de abarcar el conjunto de los reales, este nuevo tipo de números admite números "infinitos", mayores que cualquier real, y también "infinitesimales", más cercanos a cero que cualquier número real arbitrario. Aun pareciendo semejantes a los números hiperreales de Abraham Robinson, los surreales de Conway se construyen de manera distinta (con un procedimiento similar a los cortes de Dedekind) y contienen los hiperreales como un caso particular.

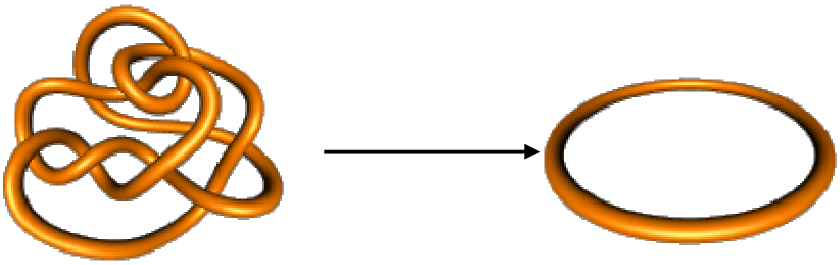


Figura 3. Desenrollamiento de un nudo

La búsqueda de métodos matemáticos que permitan diferenciar unos enlaces de otros y distinguir los que están realmente anudados de los que no, es el objetivo principal de la rama de la topología relacionada con los nudos. Para establecer una clasificación, se buscan magnitudes características denominadas invariantes de nudos y enlaces. Son cantidades cuyo valor es el mismo para todos los posibles diagramas representantes de la misma clase de equivalencia. Uno de ellos es el que se obtiene mediante el llamado polinomio de Alexander, que no posee gran capacidad de discriminación, ya que existen infinitos ejemplos de pares de nudos distintos con el mismo polinomio de Alexander (Lozano y Morton, 1990). Afortunadamente, existen otros polinomios asociados con otros invariantes para los nudos. Por ejemplo, el descubrimiento por el matemático neozelandés Vaughan Frederic Randal Jones (1952-) del polinomio que lleva su nombre para clasificar nudos (Jones, 1985; Sossinsky, 2002, pp. 71-89), le hizo merecedor de la medalla Fields, en el Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Kyoto en 1990. Sin embargo, también existen parejas de nudos con distinto polinomio de Alexander –razón por la cual son nudos distintos– que aun así tienen el mismo polinomio de Jones.

Como cabe suponer, la mayor parte de la teoría de nudos consiste en la búsqueda de métodos por los cuales podamos averiguar si dos nudos son equivalentes. Se ha instaurado la costumbre de añadir epítetos muy sonoros a los distintos tipos de nudos, quizás para conseguir una descripción más vívida y colorista de sus propiedades entre expertos y profanos. Así, tenemos nudos "domesticados" cuando su resolución no crea muchos problemas, nudos "salvajes" si sucede exactamente al contrario, y nudos "triviales" cuando son equivalentes a la circunferencia.

Figura 4. Dos variantes del nudo de trébol

El nudo de trébol es el único con tres cruces, lo que nos lleva hasta los métodos de clasificación de nudos, basados precisamente en el recuento de las veces que la cuerda se cruza sobre sí misma. Las tablas de clasificación de nudos, iniciadas a finales del siglo XIX, muestran hoy día una admirable sofisticación. Tras las tres cruces del nudo de trébol, tenemos también un solo nudo con cuatro cruces, tres con seis cruces, y siete nudos con siete cruces. La cantidad de nudos y cruces aumenta con rapidez; por ejemplo, hay 12.965 nudos con 13 o menos, y 1.701.935 con 16 o menos cruces.

También resulta de gran interés investigar si existe un procedimiento para descomponer un nudo en nudos más simples, de modo que sea más fácil su estudio tras dicha descomposición. En algunos casos puede descomponerse un nudo cortándolo transversalmente con una esfera en exactamente dos puntos. Los cabos del nudo cortado que quedan a ambos lados de la esfera se unen por una línea para producir dos nuevos nudos. Un nudo imposible de descomponer de este modo en dos nudos no triviales recibe el calificativo de "primo", cuya existencia fue probada mediante procedimientos geométricos en 1947 por H. Schubert.

Cualquier nudo no primo se obtiene por una operación inversa a la de descomposición, llamada –la "suma conexa"– a partir de una colección finita de nudos primos. Esta operación, que es asociativa, dota al conjunto de los nudos de una estructura de semigrupo, cuyo elemento neutro es el nudo trivial. El hecho de que no exista elemento inverso significa que no existe manera de deshacer un nudo mediante suma conexa de otros.

Los ocho tipos de nudos más sencillos quedarían representados en el dibujo inferior:

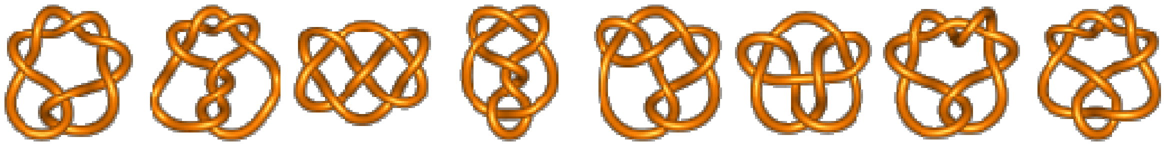


Figura 5. Las ocho clases de nudos simples

4. Implicaciones en las ciencias de la naturaleza

Gracias al estudio y manipulación del ácido desoxirribonucléico (ADN), la biología fue el primer campo en el que se aplicó seriamente la teoría de nudos fuera de la matemática pura. Descubierto en 1953 por Watson y Crick el modelo de la doble hélice de la molécula de ADN, resulta susceptible de experimentar anudamientos y deformaciones que obstaculizarían su función, lo que sugiere la importancia de aplicar en este ámbito las consideraciones topológicas antes mencionadas. La teoría de nudos permite asimismo caracterizar la estructura espacial de las moléculas de ADN antes y después de un proceso bioquímico (transcripción, isomerización, ruptura y unión), facilitando la deducción del mecanismo enzimático involucrado. Más tarde, la teoría de nudos encontró nuevas y fecundas aplicaciones en áreas de investigación como la química molecular, la mecánica estadística o la computación cuántica. Y por si todo ello fuese poco, el físico Edward Witten descubrió en la década de 1990 que los nudos se hallan vinculados a la teoría cuántica de campos a través de los invariantes generalizados de las variedades tridimensionales que los contienen.

Nuevas aplicaciones físicas de esta fascinante rama de las matemáticas no tardaron en llegar, y fueron muchos los físicos y matemáticos de primer orden que decidieron emplear las técnicas topológicas desarrolladas para los nudos en sus propios campos de investigación. Así lo hizo Louis H. Kauffman (1945-) de la Universidad de Illinois en Chicago, con su libro *Nudos y Física* en el que popularizaba el uso de estos objetos en el estudio de la naturaleza (Kauffman, 1987, 2001). Comenzaba a abrirse paso la idea de que los nudos topológicos acaso fueran útiles en la búsqueda de soluciones para la elaboración de una gravedad cuántica, así como para otros problemas concernientes a la física de la materia condensada.

Louis H. Kauffman

En el campo de los sistemas dinámicos, la teoría de nudos asiste a los investigadores en el estudio de los anudamientos y enlaces formados en las trayectorias cerradas de dichos sistemas cuando se hallan inmersos para su descripción en variedades tridimensionales. Así se concluyó que en sistemas gobernados por las ecuaciones diferenciales de Lorenz en $\mathbf{R}^3$ solo pueden aparecer un tipo de nudos llamados "nudos positivos" (Birman y Williams, 1983). Por otro lado, los conocidos como modelos de vértices permiten obtener el polinomio de Jones a partir de las funciones de partición de la mecánica estadística. Y en la mecánica de fluidos son muy habituales los modelos con tubos de flujo y vórtices anudados o enlazados, lo que conduce a una nueva cantidad medible llamada "helicidad". La helicidad resulta ser una magnitud invariante bajo deformaciones continuas de la estructura del fluido, lo cual permite realizar estimaciones medias de magnitudes geométricas relacionadas con el sistema (Rica y Berger, 1996).

Se ha recurrido a la teoría de nudos en el intento de esclarecer problemas de la física de partículas relacionados con la estadística fraccionaria asociada con la transformación de propiedades entre bosones y fermiones en modelos bidimensionales[2]. Los métodos topológicos desarrollados para los nudos han acabado generalizando los clásicos grupos de Lie, con importantes aplicaciones en teoría de cuerdas, en física de la materia condensada y en la búsqueda de invariantes en las teorías cuánticas topológicas. Pero sobre todo, a efectos del tema de este capítulo, el estudio matemático de lo nudos ha revelado insospechadas consecuencias relativas a la gravedad cuántica. Los bucles anudados que tanto atormentan a los topólogos, proporcionan de hecho una base –en el sentido algebraico– para las soluciones de las fórmulas básicas en la gravedad cuántica de lazos. Cuando se intenta cuantizar la relatividad general en su versión espacio-temporal con torsión (teorías de Einstein-Cartan), aparecen diversas cantidades llamadas bucles de Wilson (*Wilson loops*) relacionadas en cierto sentido con los nudos. Estas magnitudes permiten definir el "invariante de Vassiliev", del cual se ha conjeturado que tal vez ayude a clasificar los estados físicos de una presunta relatividad cuántica con torsión a través de los invariantes de nudo.

Sabiendo todo esto, seguro que la próxima vez que nos atemos los zapatos pensaremos con mucho más respeto en un acto aparentemente tan trivial como el de anudar dos cordones.

[2] En sistemas bidimensionales se definen "cuasi-partículas", como los anyones, cuyas estadísticas ni son fermiónicas (al permutar dos de ellas la función de onda se multiplicaría por –1) ni bosónica (la función se multiplicaría por +1). En su lugar, la función de onda de las cuasi-partículas se multiplica por un factor $\exp(i\theta)$, que incluye los fermiones ($\theta = \pi$) y los bosones ($\theta = 0$) como casos particulares.

Bibliografía

Adams, C. (1994). *The Knot Book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. San Francisco: W. H. Freeman and Co.
Birman, J.S., Williams, R.F. (1983). Knotted periodic orbits in Dynamical Systems-I: Lorenz's equations. *Topology*, 22, 47–82.
Conway, J. H. (1970). An Enumeration of Knots and Links. En Leech, J. (ed.) *Computational Problems in Abstract Algebra*, 212-234. Pergamon Press: Oxford (England).
Cromwell, P. (2004). *Knots and Links*. Cambridge (U.K.): Cam. Univ. Press.
Crowell, R. H., Fox, R.H. (1963): *Introduction to Knot Theory*. New York: Blaisdell Publishing Co.
James, I. M. (1999): *History of Topology*. Amsterdam: Elsevier Science B.V.
Jones, V.F.R. (1985). A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc*., 12, 103–112.
Kauffman, L. (1987). *On knots*. Princeton (U.S.A.): Princeton University Press.
Kauffman, L. (2001). *Knots and Physics*. Singapore: World Scientific Publishing Co.
Knuth, D. (1974). *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness*, Boston: Addison-Wesley.
Livingston, Ch. (1993). *Knot theory*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
Lozano, M.T. (1998). *Nudos y variedades tridimensionales* (Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza). Zaragoza: Librería General.
Lozano, M.T., Morton, H. (1990). *Pairs of closed 3-braids with the same Alexander polynomial* (Libro homenaje al Profesor A. Plans). Zaragoza: Universidad de Zaragoza.
Rica, R.L., Berger, M.A. (1996). Topological ideas and fluid mechanics. *Physics Today*, 49-12, 28–34.
Sossinsky, A. (2002). *Knots, mathematics with a twist*. Harvard: Harvard University Press.

Rafael Andrés Alemañ Berenguer (Alicante, 1966). Licenciado en CC. Químicas por la Universidad de Valencia (especialidad Bioquímica) y en CC. Físicas (especialidad Fundamental) por la UNED. Actualmente colaborador y doctorando en el Departamento de Ciencia de Materiales, Óptica y Tecnología Electrónica de la Universidad *Miguel Hernández* (Elche). Autor de numerosos artículos y libros de divulgación científica, también participa como asesor en distintos medios de comunicación social en temas divulgativos de carácter científico. Su labor investigadora, entre otros campos, se ocupa de las propiedades opto-electrónicas de los biomateriales así como de los fundamentos y epistemología de la física fundamental.

Estrella Jornet Gil (Elche, 1966). Licenciada en CC. Económicas por la Universidad de Valencia, Máster en Comercio Extrerior y Técnica Superior en Prevención de Riesgos Laborales por la Universidad Politécnica de Valencia, es actualmente profesora de matemáticas en el I.E.S. "Las Lomas de Juan XIII" en Alicante. Consultora fiscal y financiera, ha trabajo como profesora del área económico-laboral para la Fundación de Estudios de la Administración Pública. Actualmente encabeza uno de los equipos de trabajo que desarrolla las nuevas estrategias didácticas concernientes al uso de las pizarras digitales en la enseñanza media, promovido por el gobierno autonómico valenciano.